O Teorema de Bézout com Aplicações

Autor: Ludwig Monteiro Alvarenga Arouca
Orientador: Fernando Lourenço

Resumo

O projeto baseia-se no estudo das curvas algébricas planas. Em um primeiro momento estudamos as curvas em $\mathbb{C}^2$ e suas propriedades. Com a motivação de resolver um sistema de equações, que geometricamente representa as interseções entre duas curvas, começamos a estudar interseções entre duas curvas algébricas através do método da resultante. Nesse contexto, um resultado importante sobre interseções entre curvas algébricas é o Teorema de Bézout.

Teorema de Bézout (versão fraca): *Sejam C e D duas curvas algébricas definidas por f e g, onde $\partial f = m$ e $\partial g = n$. Suponha que C e D não têm componentes em comum, então C e D têm no máximo mn pontos de interseção, ou seja,*

$$\#C \cap D \leq mn.$$

Tal resultado apresenta uma cota superior para o número de interseções de C e D. Com isso, foi possível estudar algumas aplicações do Teorema de Bézout, como, por exemplo, o Teorema de Pappus. Outra aplicação é o Teorema do hexágono de Pascal, que diz que os pontos de interseção dos lados opostos de um hexágono inscrito numa cônica irredutível são colineares.

A continuidade do estudo deste tema foi motivada a partir dos exemplos nos quais as interseções que encontrávamos não chegava ao número máximo apresentado pelo Teorema de Bézout. Por exemplo, quando temos uma parábola, de equação $y = x^2$ e a reta, de equação $x = 1$, temos apenas o ponto de interseção $P = (1, 1)$. Mas, pelo Teorema de Bézout, o número máximo de pontos seria dois. Com isso, demos sequência aos estudos com os pontos no infinito e o plano projetivo $\mathbb{P}^2$ que, a partir desses conceitos, nos dá condições de encontrar todas as interseções entre duas curvas. Assim, temos:

Teorema de Bézout: *Sejam C e D duas curvas projetivas definidas por F e G, onde $\partial F = m$ e $\partial G = n$. Suponha que C e D não têm componentes em comum, então C e D têm exatamente mn pontos de interseção, ou seja,*

$$\#C \cap D = mn.$$

Bibliografia

FUNTON, Willian. Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry, Mc Graw Hill, 2008.

LEIMANN, Katia Regina Fraga. Teorema do Hexágono de Pascal Teorema de Pappus, TCC 2003.

VAINSENCHER, Israel. Introdução às Curvas Algébricas Planas, Coleção Matemática Universitária-IMPA, 1996.